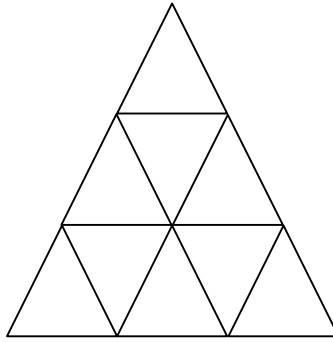


II етап (міський, районний)
Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики

18 листопада, 2017 рік

6 клас

1. Яка загальна кількість трикутників, зображених на рисунку?
Відповідь обґрунтуйте.



2. Знайдіть значення виразу $a - 10b$, де $a = 3,(23)$ і $b = 0,(32)$.
3. Щоб пронумерувати сторінки довідника, знадобилось 6961 цифр. Скільки сторінок у довіднику?
4. На прямій відмітили точки A , B і C так, що $AB = 40$ см, $BC = 20$ см. Знайти відстань між серединами відрізків AB і BC .
5. У класі 25% відмінників, серед яких кожна третя дівчина. Вісім хлопців не є відмінниками. Знайти кількість учнів класу, якщо у класі дівчат і хлопців порівну.

Кожна задача оцінюється у 7 балів

На обкладинці роботи вкажіть ПІБ учня, його школу, клас, повну домашню адресу з поштовим індексом, домашній телефон, ПІБ вчителя математики і ПІБ вчителя (викладача), який готував до олімпіади.

II етап (міський, районний)
Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики

18 листопада, 2017 рік

7 клас

1. Дано два кути ABC і CBD , градусні міри яких становлять 80° і 40° відповідно. Знайти градусну міру кута, утвореного бісектрисами даних кутів.
2. Знайти добуток коренів рівняння $(|x| + 5)(|x| - 5) = 0$.
3. У ліцеї навчається 70 учнів, з них 27 записалося в драмгурток, 32 співають у хорі, 22 захоплюються спортом. Драмгурток відвідує 10 учнів, які також займаються в хорі, у хорі співають 6 спортсменів, у драмгуртку займається 8 спортсменів, 3 спортсмени відвідують і драмгурток, і хор. Скільки дітей не співають у хорі, не захоплюються спортом і не займаються в драмгуртку?
4. Скільки одиниць (цифр «1») у запису суми $S = 9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{9\dots9}_{2017}$?
5. В прямокутнику 5×6 зафарбовано 19 клітинок. Доведіть, що в ньому можна обрати квадрат 2×2 , в якому зафарбовано не менше трьох клітинок.

Кожна задача оцінюється у 7 балів

На обкладинці роботи вкажіть ПІБ учня, його школу, клас, повну домашню адресу з поштовим індексом, домашній телефон, ПІБ вчителя математики і ПІБ вчителя (викладача), який готував до олімпіади.

8 клас

1. Доведіть, що пари прямих, які містять паралельні сторони паралелограма, відтинають рівні відрізки на прямій, яка є паралельною до однієї з його діагоналей.

2. Знайти суму коренів рівняння

$$(|x| - 1) \cdot (|x| - 2) \cdot \dots \cdot (|x| - 2016) \cdot (|x| - 2017) = 0.$$

3. Дано 11 різних натуральних чисел. Доведіть, що з них завжди можна обрати два числа, різниця яких ділиться на 10.

4. В прикладі на ділення цифри замінили літерами: одна й та ж цифра – однією літерою, різні цифри – різними літерами. Відновіть «приховані» цифри.

$$\begin{array}{r} - \quad a \quad b \quad c \quad d \quad | \quad c \quad d \\ \quad c \quad d \quad \quad \quad | \quad b \quad c \quad d \\ \hline \quad e \quad c \\ - \quad d \quad h \\ \hline \quad b \quad c \quad d \\ - \quad b \quad c \quad d \\ \hline \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

5. Кожна точка площини розфарбована в один з двох кольорів. Доведіть, що на площині існує рівнобедрений трикутник, всі вершини якого розфарбовано в один колір.

Кожна задача оцінюється у 7 балів

На обкладинці роботи вкажіть ПІБ учня, його школу, клас, повну домашню адресу з поштовим індексом, домашній телефон, ПІБ вчителя математики і ПІБ вчителя (викладача), який готував до олімпіади.

9 клас

1. Два кола ω_1 і ω_2 з центрами у точках O_1 і O_2 (відповідно) дотикаються (зовнішнім або ж внутрішнім чином) у точці T , A_1A_2 – спільна січна, яка проходить через точку T , $A_1 \in \omega_1$, $A_2 \in \omega_2$. Доведіть, що $\angle A_1O_1T = \angle A_2O_2T$.

2. Для двозначного числа Z (одночасно) мають місце наступні твердження:

- 1) Число закінчується цифрою 5 або ж ділиться на 7.
- 2) Число є більшим за число 20 або ж закінчується цифрою 9.
- 3) Число ділиться на 12 або ж є меншим за число 21.

Знайти це число. Відповідь обґрунтуйте.

3. Доведіть, що для додатних a, b, c справджується нерівність

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

4. В рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC ($AB = BC$) на стороні AB обрано точку D та навколо трикутників ADC і BDC описано кола ω_1 і ω_2 відповідно. Дотична t , яку проведено до кола ω_1 в точці D , вдруге перетинає коло ω_2 в точці T . Доведіть, що $BT \parallel AC$.

5. При яких значеннях параметра a рівняння $|2|x| - 5| = a - x$ має (точно) три корені.

Кожна задача оцінюється у 7 балів

На обкладинці роботи вкажіть ПІБ учня, його школу, клас, повну домашню адресу з поштовим індексом, домашній телефон, ПІБ вчителя математики і ПІБ вчителя (викладача), який готував до олімпіади.

10 клас

1. Чи існує таке число x , що значення виразів $(\operatorname{tg} x + \sqrt{3})$ та $(\operatorname{ctg} x + \sqrt{3})$ є цілими числами?
2. Дано тетраедр $SABC$ та точки M , N і P , які належать граням SBC , SCA і SAB відповідно. Відомо, що прямі MN і MP є паралельними до площини, яка містить грань ABC . Побудуйте переріз тетраедра $SABC$, якщо січна площина проходить через зазначені точки M , N і P .
3. Доведіть, що для додатних a, b, c, d справджується нерівність
$$a + b + c + d \geq 4\sqrt[4]{abcd}.$$
4. Доведіть, що якщо довжини сторін трикутника утворюють арифметичну прогресію, а довжини висот – геометричну, то такий трикутник є правильним.
5. Розв'язати рівняння

$$x^2 + \frac{x^2}{(x+1)^2} = a$$

при всіх значеннях параметра a .

Кожна задача оцінюється у 7 балів

На обкладинці роботи вкажіть ПІБ учня, його школу, клас, повну домашню адресу з поштовим індексом, домашній телефон, ПІБ вчителя математики і ПІБ вчителя (викладача), який готував до олімпіади.

11 клас

1. Знайти об'єм тетраедра, довжини бічних ребер якого становлять 6 см, 7 см та 8 см, а всі плоскі кути при вершині є прямими.
2. При яких значеннях параметра a функція $y = \lg\left(x + \sqrt{x^2 + |a|}\right)$ є непарною.
3. Розв'язати рівняння $x^2 + 2x \cdot \sin(xy) + 1 = 0$.
4. Довжини висоти та бісектриси, що опущені з вершини C прямого кута прямокутного трикутника ABC , становлять h і l відповідно ($l > h$). Знайти площу трикутника ABC .
5. В одиничний квадрат (розміром $1\text{см} \times 1\text{см}$) помістили 51 точку. Доведіть, що існують три точки, які можна покрити кругом радіуса $1/7$ см.

Кожна задача оцінюється у 7 балів

На обкладинці роботи вкажіть ПІБ учня, його школу, клас, повну домашню адресу з поштовим індексом, домашній телефон, ПІБ вчителя математики і ПІБ вчителя (викладача), який готував до олімпіади.